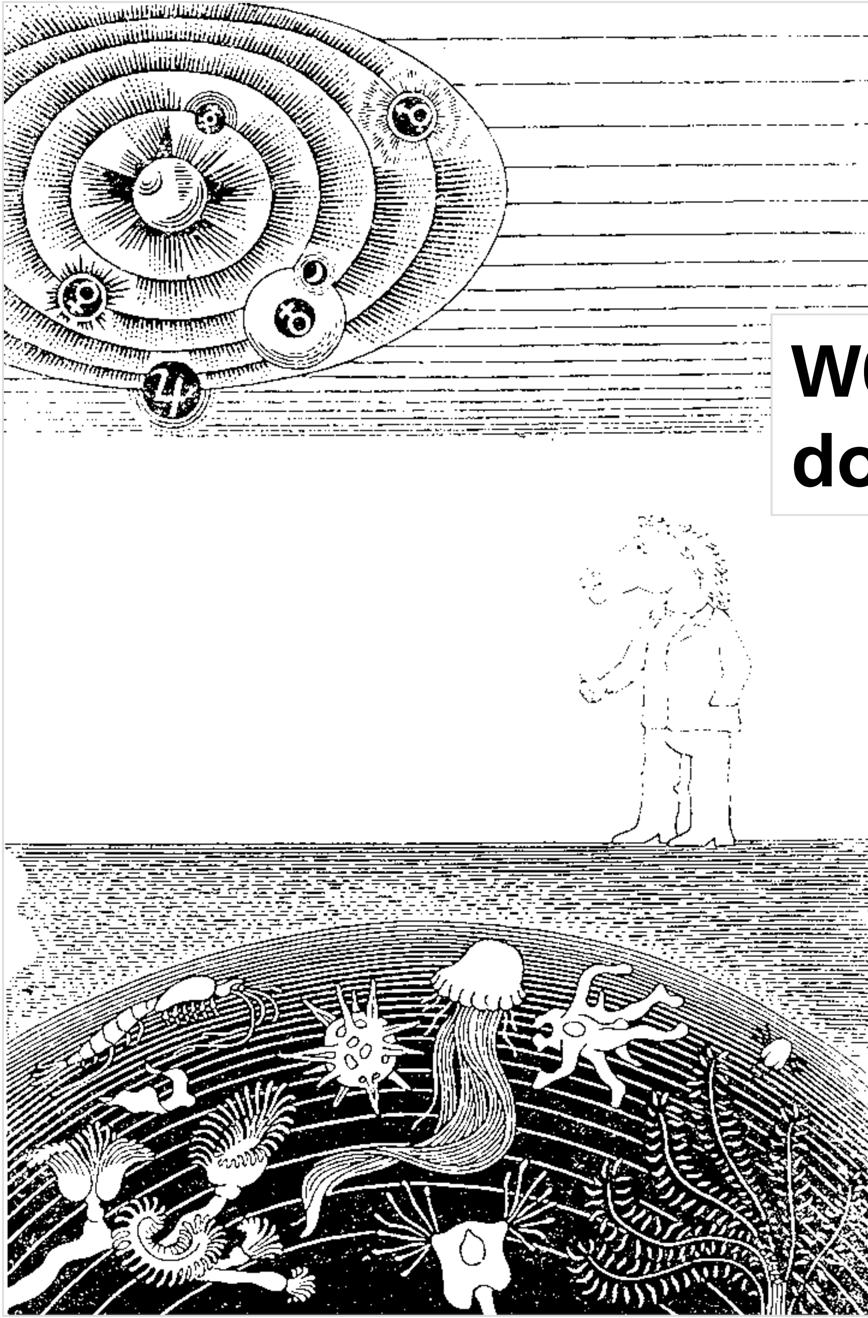


W6. Wprowadzenie do równań różniczkowych

Prof. dr hab. Jerzy Nakielski

Zespół Biofizyki i Morfogenezy Roślin

Plan wykładu:

1. Co to jest równanie różniczkowe
2. Rodzaje równań różniczkowych: zwyczajne i cząstkowe
3. Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych – rozwiązania ogólne i szczególne, warunek początkowy, krzywe całkowe.
4. Przykłady równań, ich rozwiązania i zastosowanie.
5. Alometria
6. Interpretacja geometryczna rozwiązań - pole elementów kierunkowych.
7. Równanie dyfuzji jako przykład równania różniczkowego cząstkowego

Równaniem różniczkowym nazywamy równanie określające związek pomiędzy zmienną x, nieznaną funkcją y, oraz pochodną bądź pochodnymi y względem x.

F(x, y, y') = 0, równanie różniczkowe rzędu I

Rozwiązaniem jest różniczkowalna funkcja y spełniająca równanie, czyli dla równania I rzędu taka, dla której F(x, y, y') = 0

F(x, y, y', y'') = 0, równanie różniczkowe rzędu II

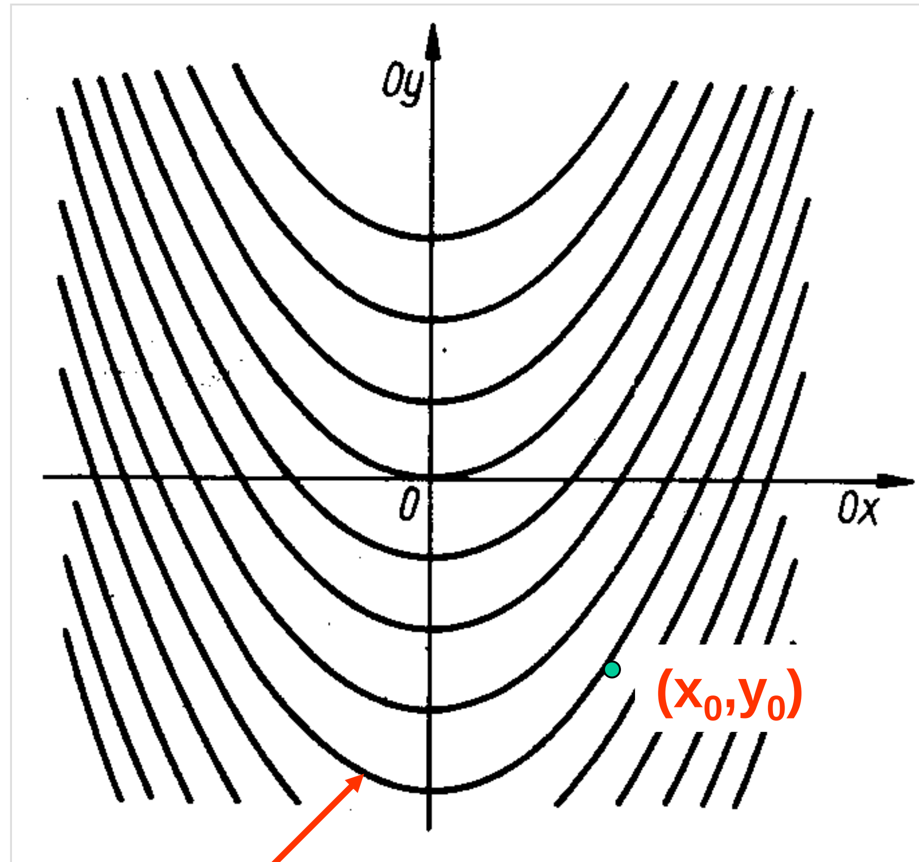
Równanie różniczkowe	zwyczajne	cząstkowe
rzędu 1	$\frac{dy}{dx}+y+x=0$	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$
rzędu 2	$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=x$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

równanie różniczkowe: $y' = 2x$

rozwiązanie ogólne:

$$y = x^2 + C$$

(rodzina krzywych)



warunek początkowy:

punkt (x_0,y_0)

rozwiązania szczególne:

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2$$

(konkretna krzywa należąca do rodziny)

$$y' = 2x$$

$$\int y' \, dx = \int 2x \, dx$$

$$y = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}x^2 + c$$

$$\boxed{y = x^2 + c} \text{ r. o.}$$

$$(x_0, y_0) = (2, 3)$$

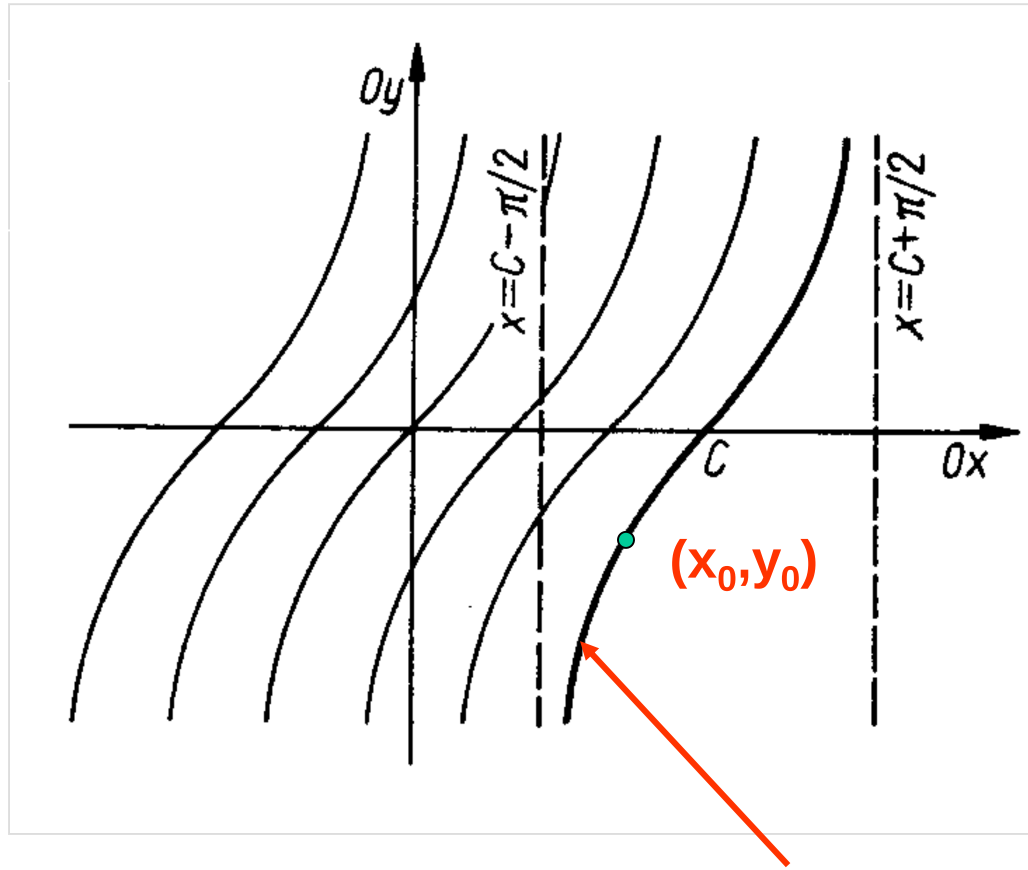
$$3 = 2^2 + c$$

$$3 - 4 = c \qquad c = -1$$

$$\boxed{y = x^2 - 1} \text{ r. sz.}$$

równanie różniczkowe: $y' = 1 + y^2$

rozwiązanie ogólne:
$y = \mathrm{tg}(x-C)$



warunek początkowy:
punkt (x_0,y_0)

rozwiązania szczególne:

$$y = \mathrm{tg}\,(x - x_0 + \mathrm{arc\,tg}\, y_0), \qquad |x - x_0 + \mathrm{arc\,tg}\, y_0| < \pi/2$$

$$y' = 1 + y^2$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{(1+y^2)}\,dx = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\operatorname{arctg} y = x \mp c$$

$$y = \operatorname{tg}(x \mp c) \qquad |x+c| < \frac{\pi}{2}$$

veri $y' = \frac{1}{\cos^2(x-c)}$ //

prova $1+y^2 = 1 + \frac{\sin^2(x-c)}{\cos^2(x-c)} =$

$$= \frac{\cos^2(x-c)+\sin^2(x-c)}{\cos^2(x-c)} = \frac{1}{\cos^2(x-c)} \;//$$

(x_0, y_0)

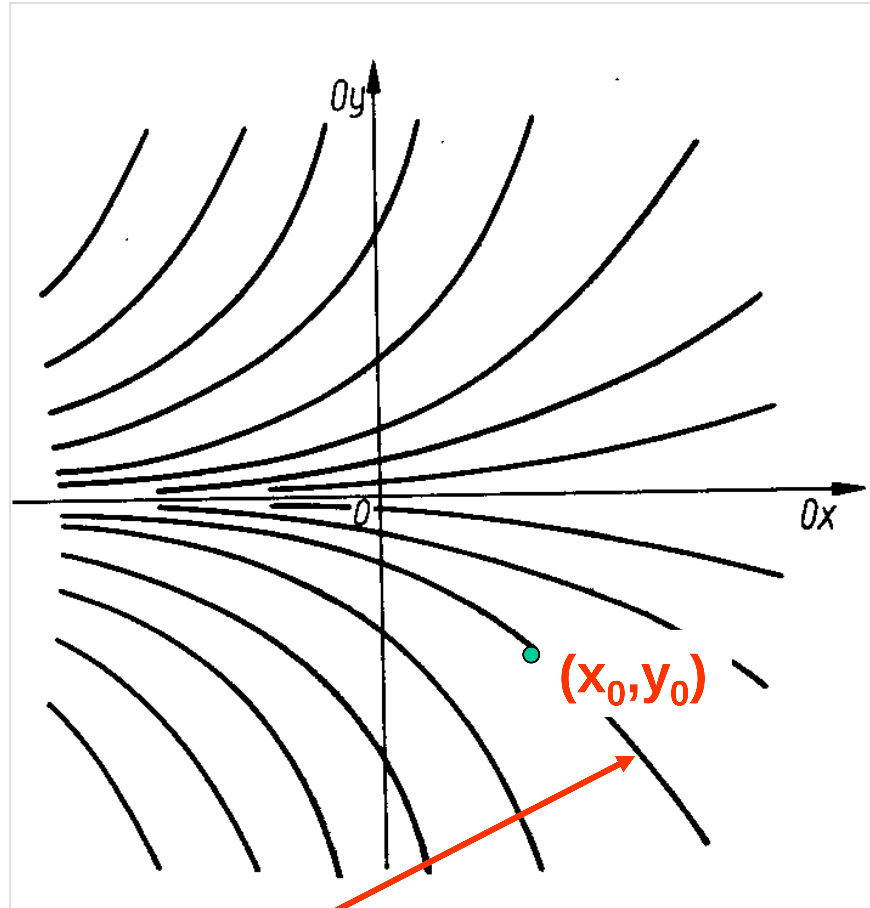
$c = x_0 - \operatorname{arctg} y_0$

$y = \operatorname{tg}(x - x_0 \operatorname{arctg} y_0)$

równanie różniczkowe: $y' = y$

rozwiązanie ogólne:

$$y = C e^{x} \qquad x \in \mathcal{R},$$



warunek początkowy:
punkt (x_0,y_0)

rozwiązania szczególne:

$$y = y_0 e^{x - x_0} \qquad x \in \mathcal{R}$$

$$y' = y$$

$$\frac{y'}{y} = 1$$

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + A$$

$$|y| = e^{x+A} = e^x e^A$$

B

$$|y| = Be^x \qquad \pm B = C$$

$$\boxed{y = Ce^x}$$

r. ogólne

$(x_0 y_0)$

$$y_0 = Ce^{x_0} \rightarrow C = \frac{y_0}{e^{x_0}}$$

$$C = y_0 e^{-x_0}$$

$$y = y_0 e^{-x_0} e^x$$

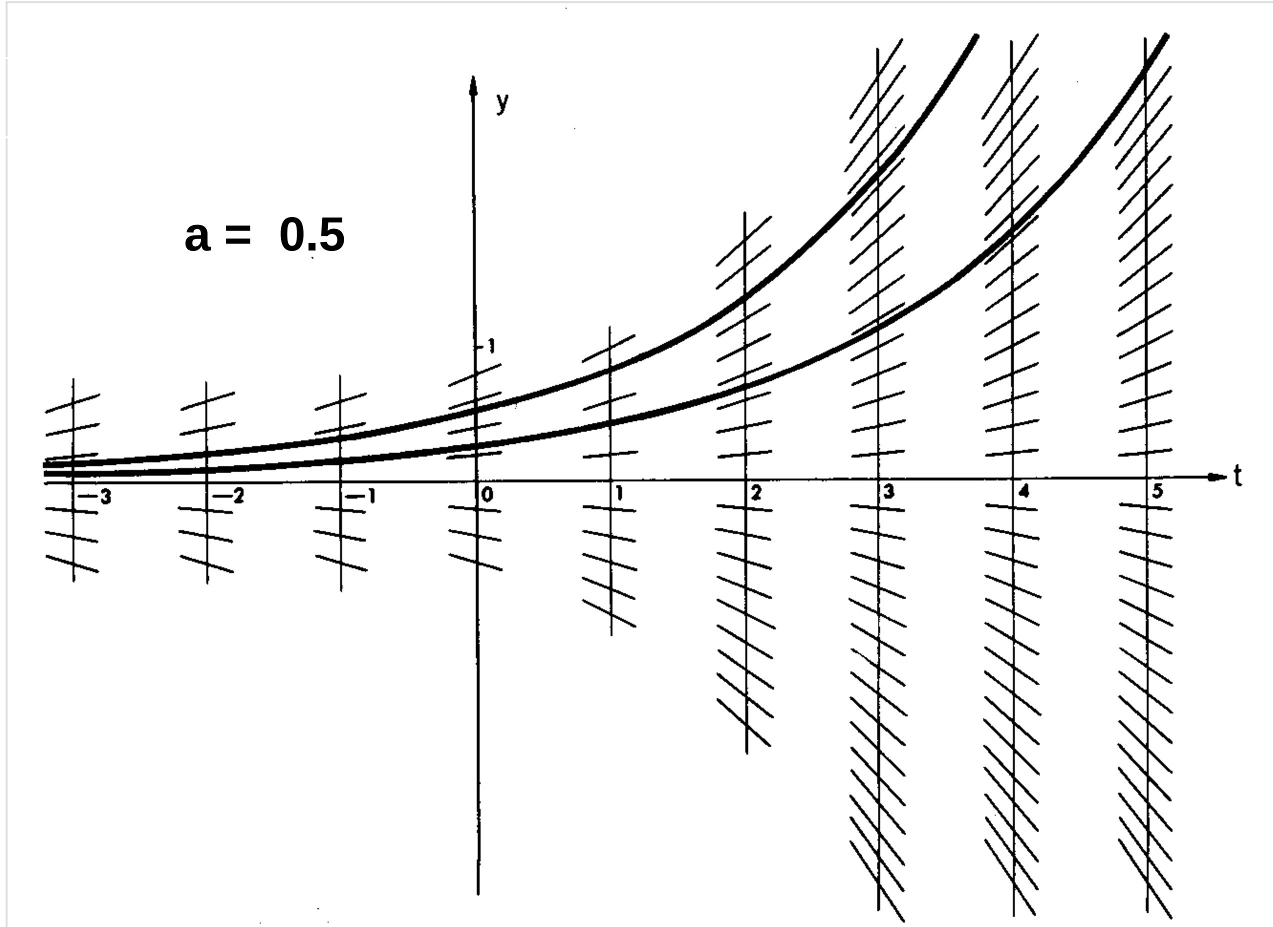
$$y = y_0 e^{x-x_0}$$ r. sz.

$$y' = ay$$

$$\underline{y = y_0 e^{at}}$$

y' = a y

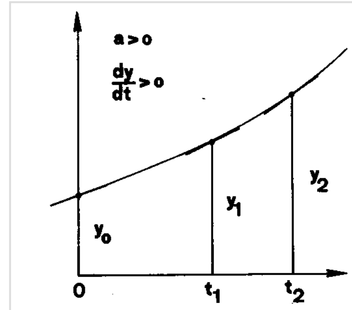
y = c exp (at)

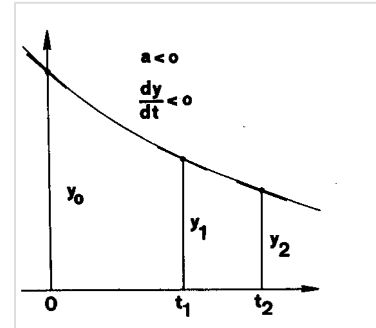


1. Wzrost nieograniczony

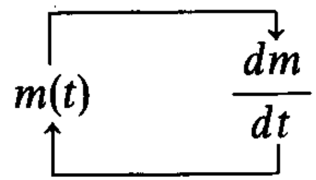
$$m' = a\,m$$

$$m = m_0 \exp(at)$$





zasada sprzężenia zwrotnego



2. Wzrost populacji z uwzględnieniem narodzin i śmierci osobników

$N(t)$

$$\underbrace{\frac{dB}{dt} = aN} \qquad \underbrace{\frac{dD}{dt} = \mu N}$$

$$\frac{dN}{dt} = aN - \mu N$$

$$\frac{dN}{dt} = (a-\mu)N$$

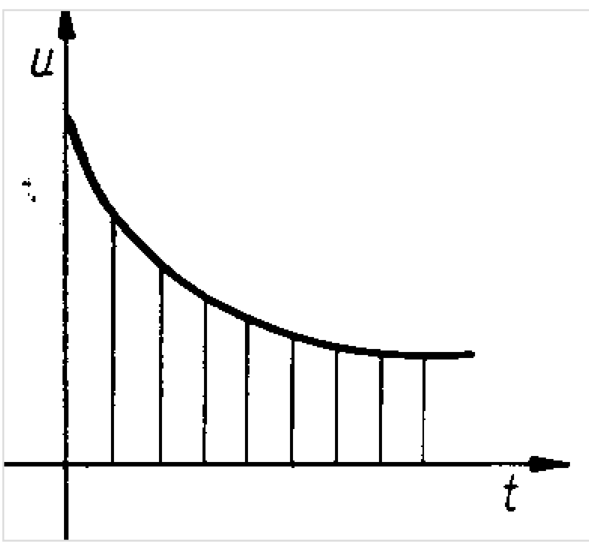
$$\underbrace{N = N_0\, e^{(a-\mu)t}}$$

równanie różniczkowe: $y' = ay + b$

1. **Wzrost ograniczony I**
2. **Wzrost populacji uwzględniający migracje**
3. **Stygnięcia ciała**

$$\frac{dN}{dt} = aN - \nu$$

$$N = N_0 e^{at} + \frac{\nu}{a}\left(e^{at} - 1\right)$$



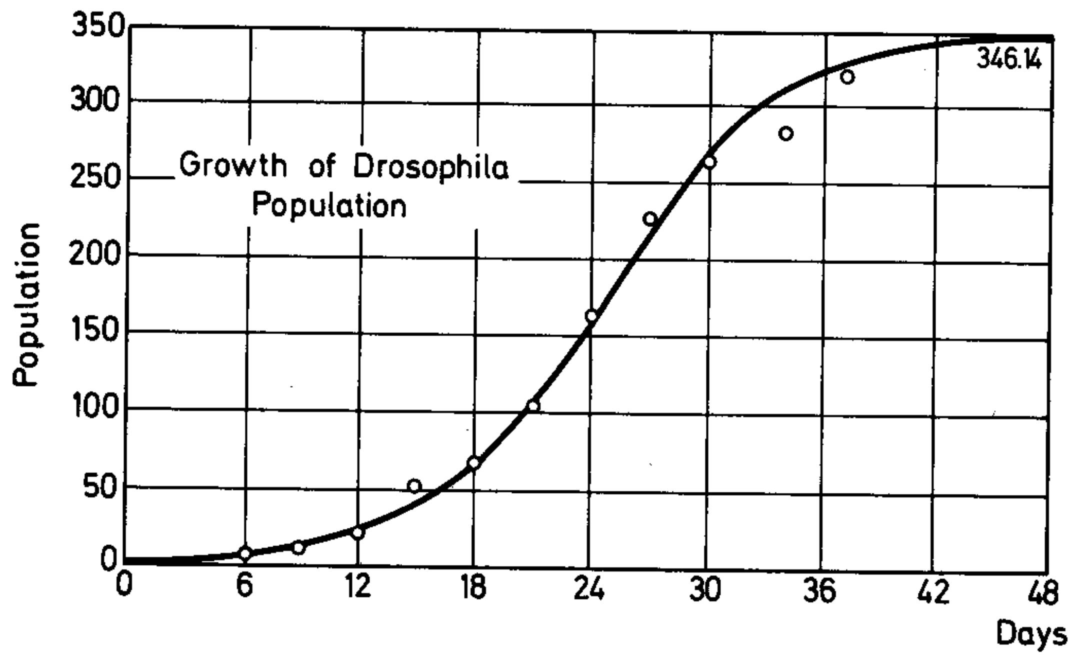
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s)$$

$$T = ce^{-kt} + T_s.$$

$$T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}.$$

równanie różniczkowe: $y' = ay^2 + by + c$

1. Wzrost ograniczony II

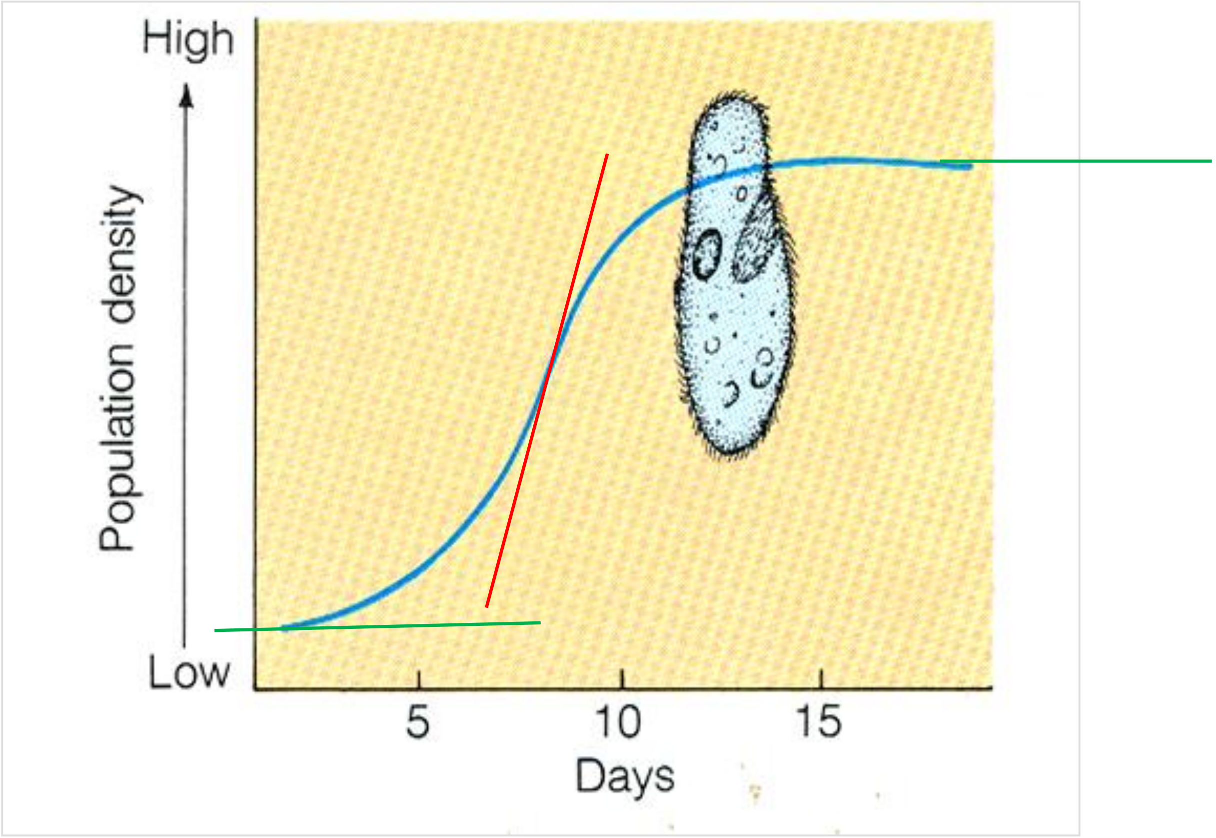


$$y' = ay^2 + bx + c = a(A-y)(B-y) \qquad A \neq B.$$

$$\frac{dy}{dt} = a(A-y)(B-y)$$

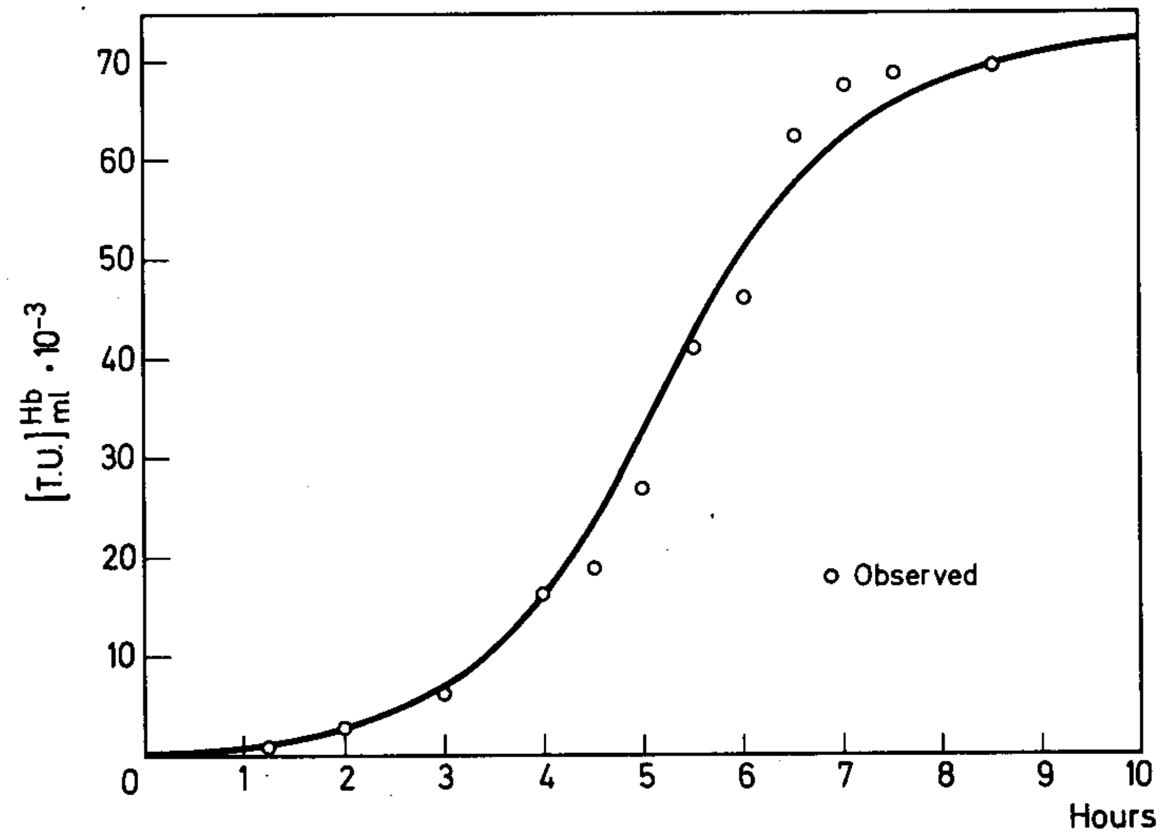
$$\frac{dy}{(A-y)(B-y)} = a\,dt$$

$$y = A + \frac{B-A}{1+be^{a(B-A)t}}$$


High
Population density
Low
5
10
15
Days

2. Reakcja autokatalityczna

$$\frac{dy}{dt} = r(y_0 + y)(B - y)$$



$$y = -y_0 + \frac{B + y_0}{1 + ke^{-r(B+y_0)t}}.$$

Allometria

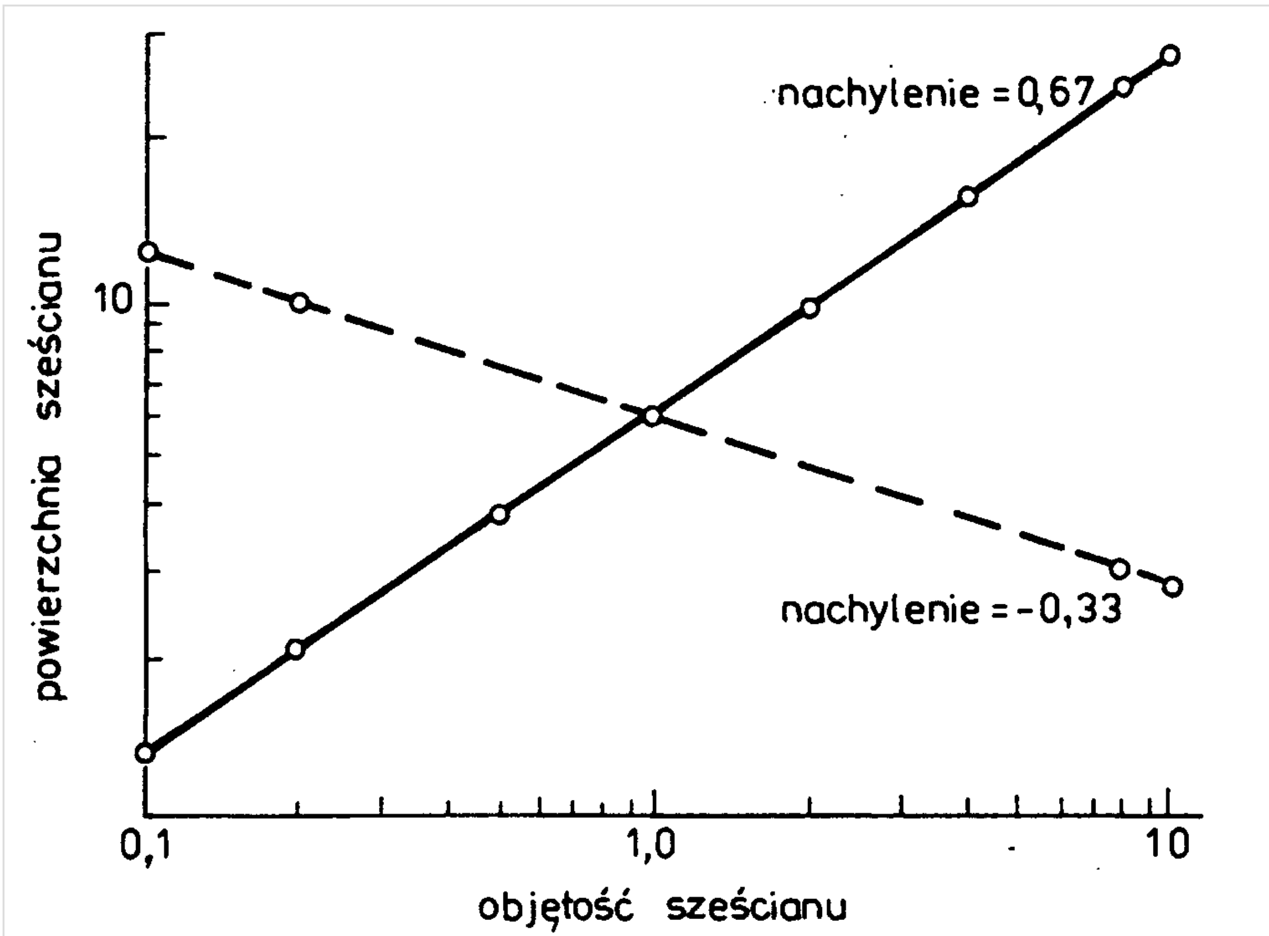
powierzchnia $\approx$ (długość)^2 lub $S \approx L^2$

objętość $\approx$ (długość)^3 lub $V \approx L^3$

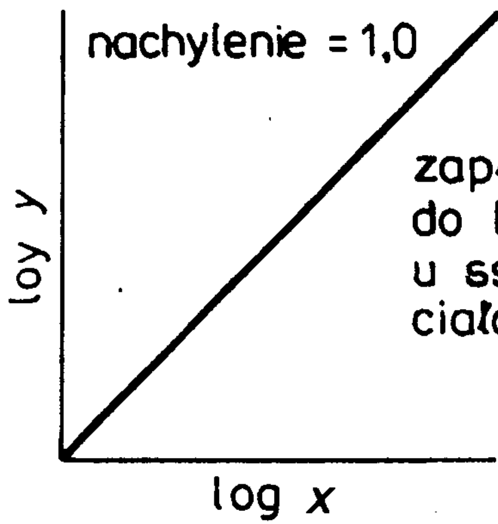
$$\frac{S}{V} = k\,\frac{V^{0,67}}{V} = k \times V^{0,67-1,0}$$

$$\frac{S}{V} = kV^{-0,33}$$

$$S = k \times V^{0,67}$$

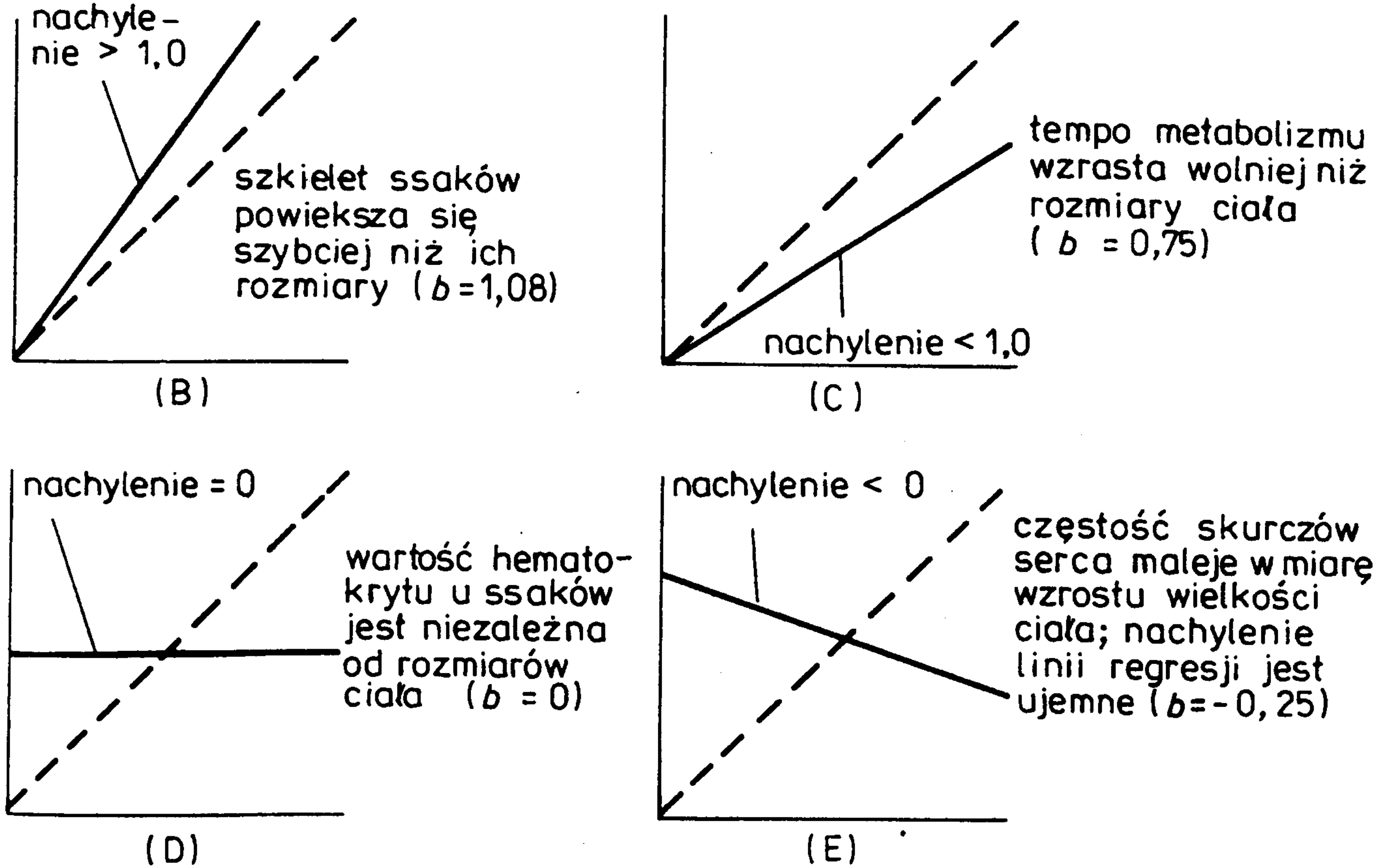


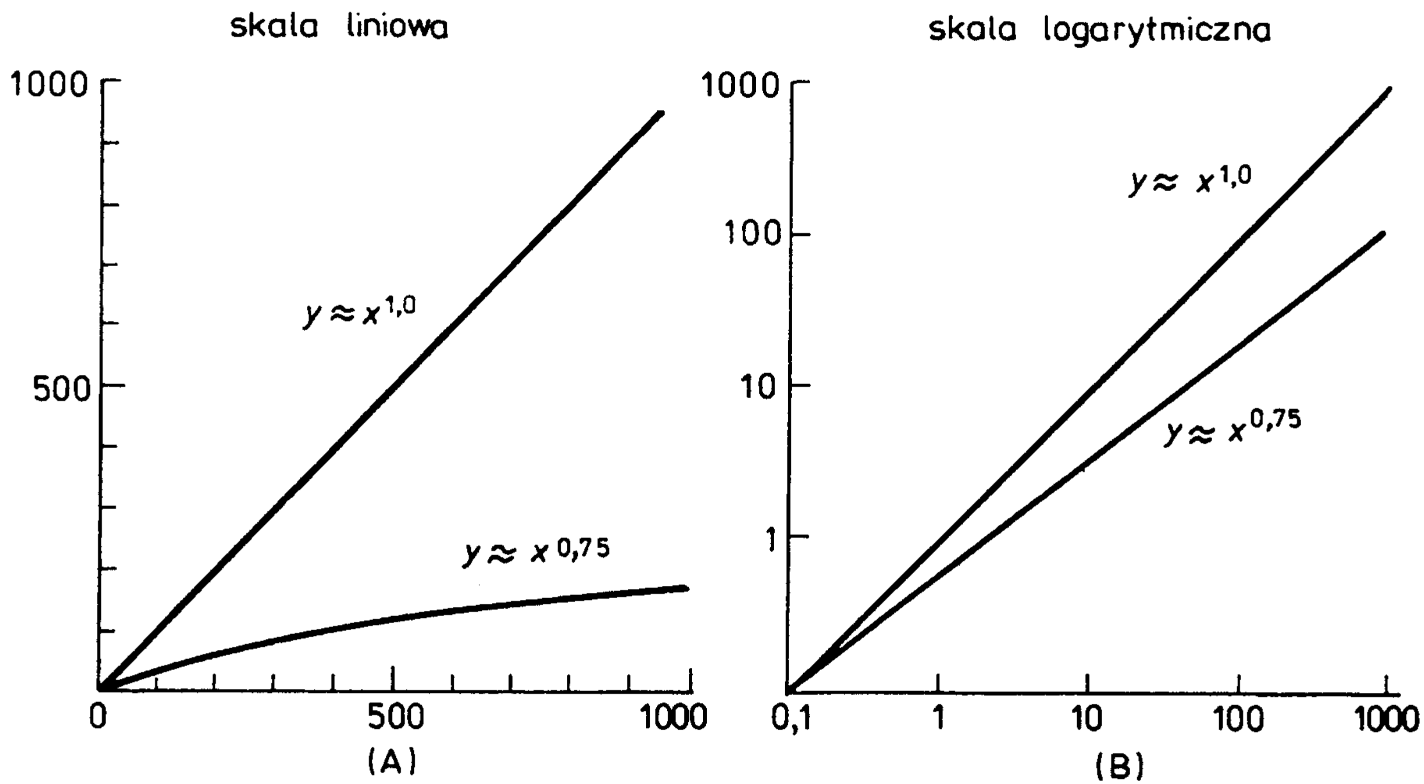
$$y = a \cdot x^b$$
$$\log y = \log a + b \log x$$



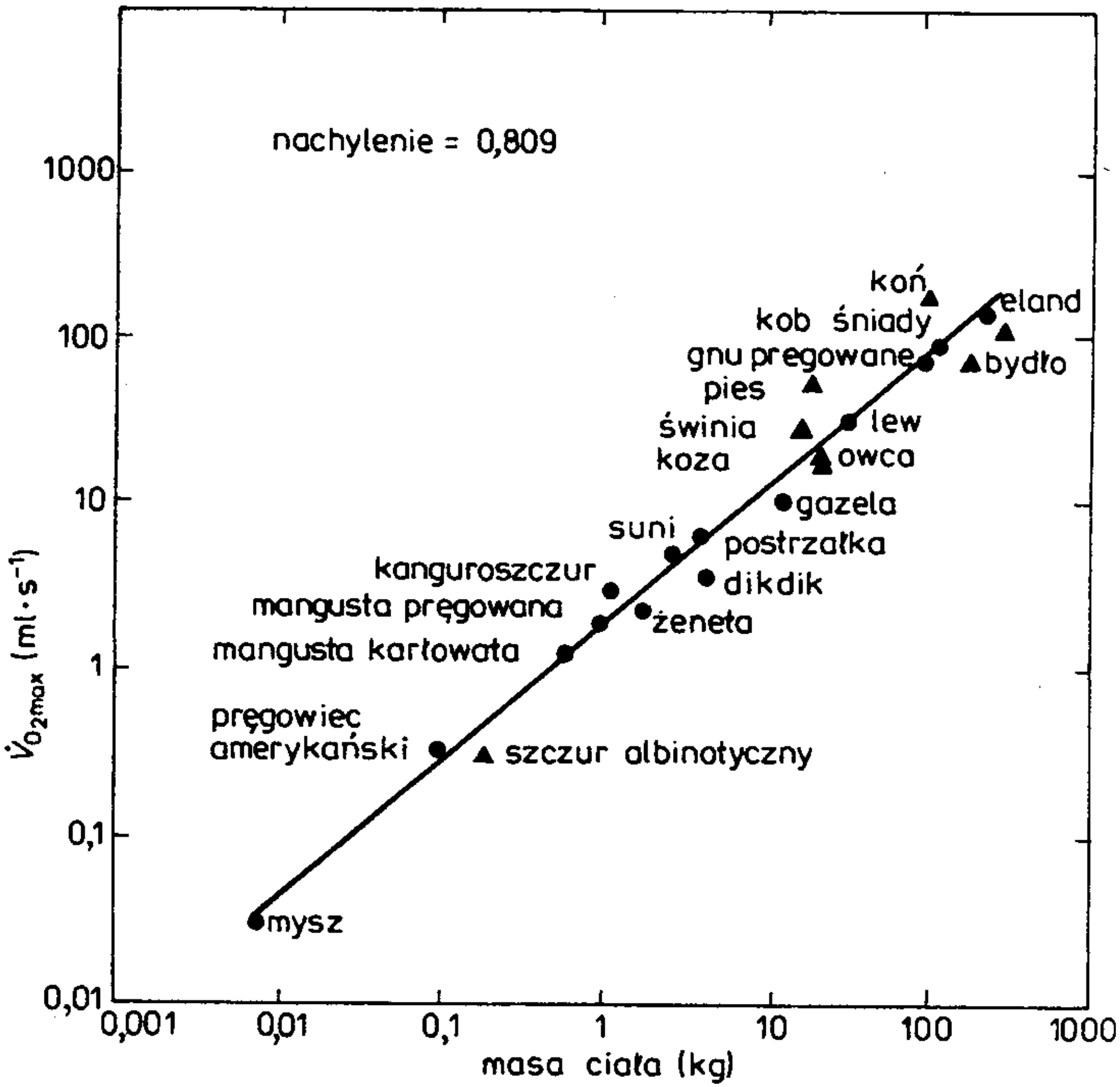
(A)

zapłata za jabłka wzrasta proporcjonalnie do liczby kupionych jabłek, objętość krwi u ssaków wzrasta współmiernie do wielkości ciała ($b = 1,0$)

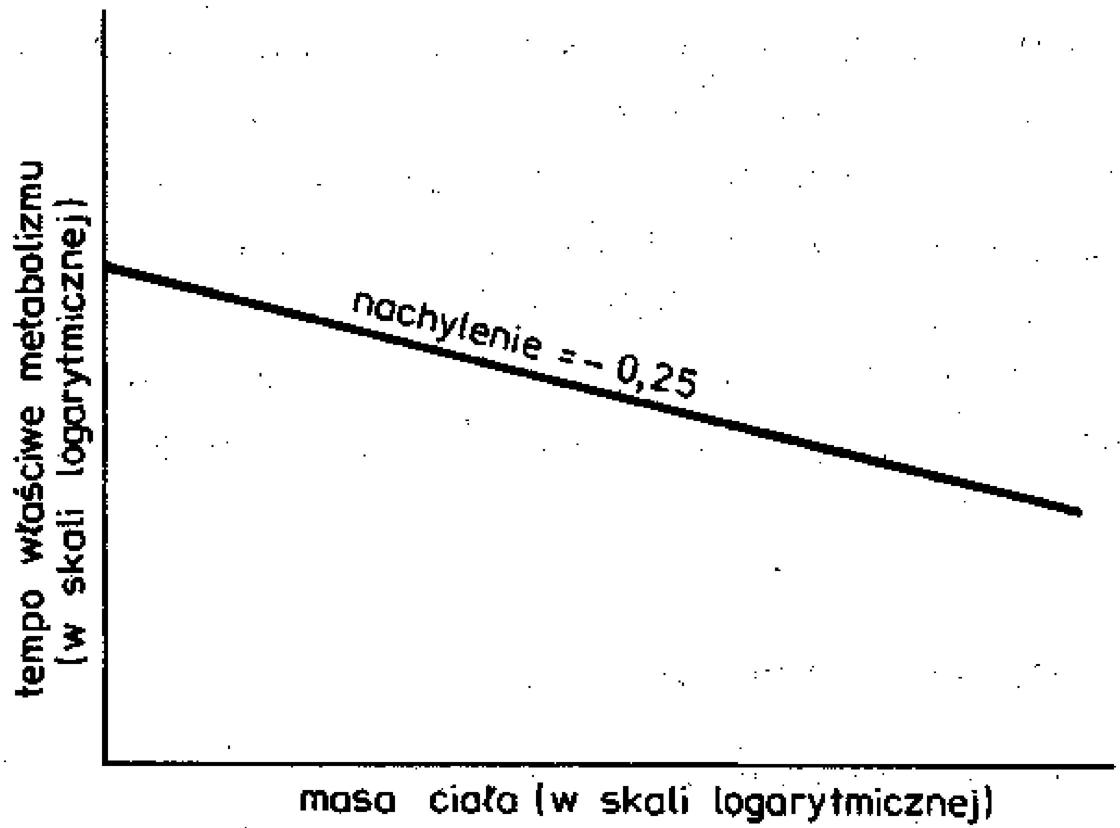

nachyle-
nie > 1,0
szkielet ssaków
powieksza się
szybciej niż ich
rozmiary (b=1,08)
(B)
tempo metabolizmu
wzrasta wolniej niż
rozmiary ciała
(b =0,75)
nachylenie < 1,0
(C)
nachylenie = 0
wartość hemato-
krytu u ssaków
jest niezależna
od rozmiarów
ciała (b =0)
(D)
nachylenie < 0
częstość skurczów
serca maleje w miarę
wzrostu wielkości
ciała; nachylenie
linii regresji jest
ujemne (b=-0,25)
(E)



Rys. 2.7. W skali liniowej dwie funkcje przyjmują postać różnych linii regresji (A), natomiast w skali logarytmicznej wykazują wyraźne podobieństwo (B). Warto podkreślić, że niewielkie różnice w skali logarytmicznej mogą być wyrazem znacznych różnic w skali arytmetycznej.



Rys. 13.1. Maksymalne tempo zużycia tlenu podczas biegu u 22 gatun ssaków o masie ciała od 0,007 do 263 kg (Taylor i wsp., 1981)


tempo właściwe metabolizmu (w skali logarytmicznej)
nachylenie = - 0,25
masa ciała (w skali logarytmicznej)

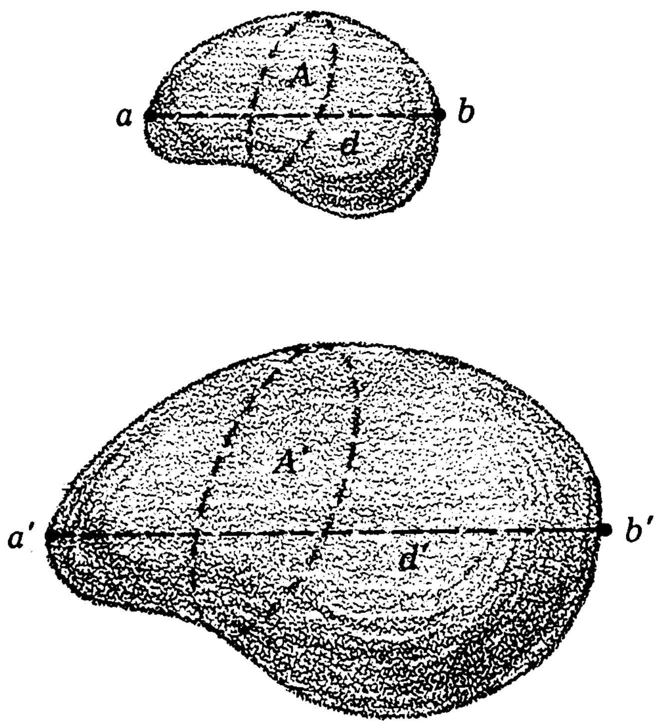
$$\frac{dy}{dx} = k\,\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = k\frac{dx}{x},$$

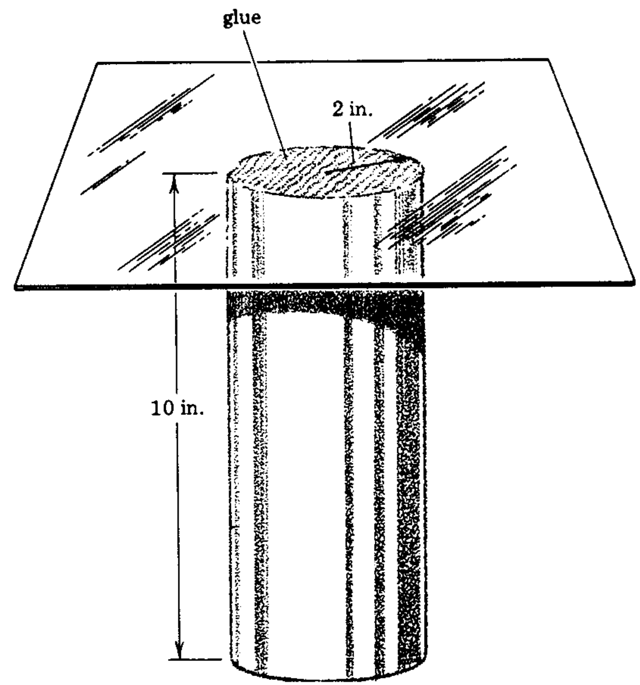
$$\ln y = k \ln x + C \qquad (x > 0,\ y > 0),$$

$$y = e^{k \ln x + C} = e^{C}(e^{\ln x})^{k}$$

$$y = cx^{k} \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

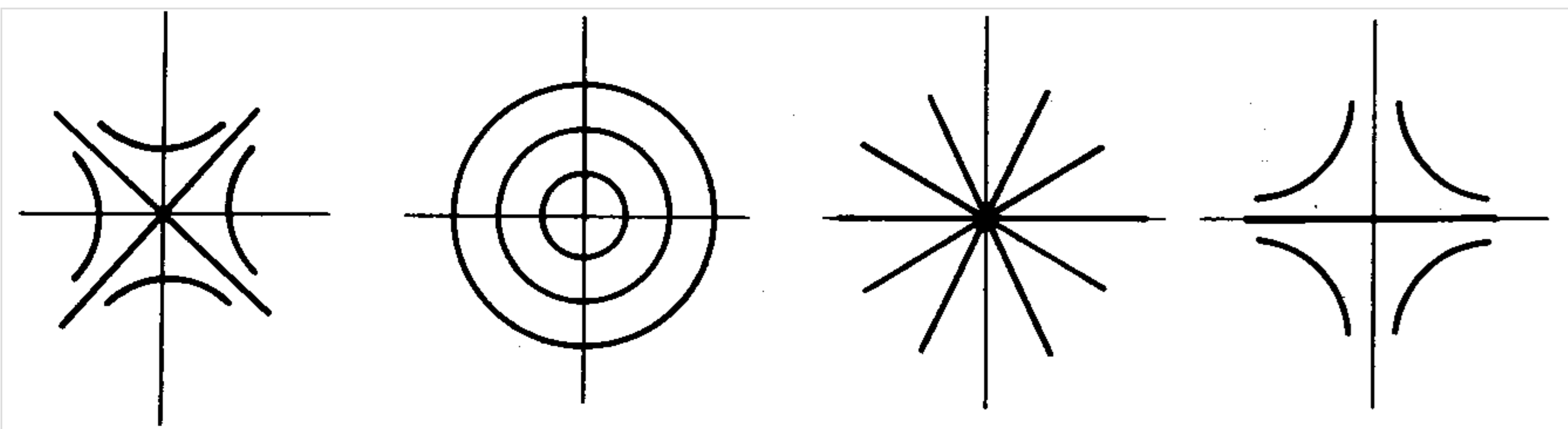


A
a
b
d
A'
a'
b'
d'



glue
2 in.
10 in.

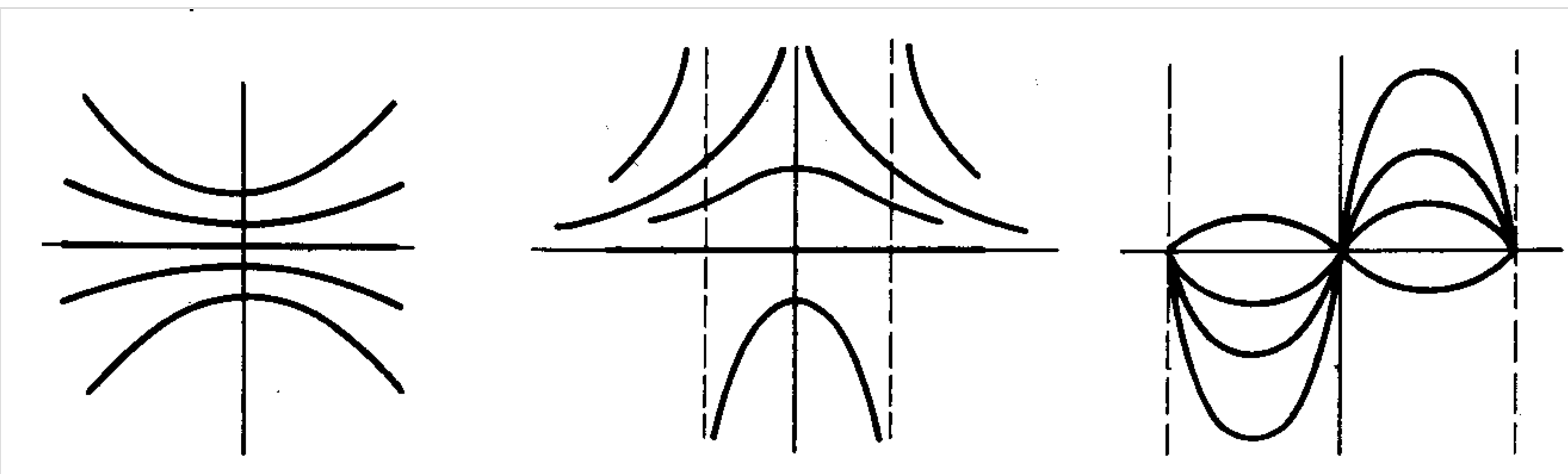
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$	$x^2 - y^2 = C,$	$y \neq 0$
$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$	$x^2 + y^2 = C,$	$y \neq 0$
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$	$y = Cx,$	$x \neq 0$
$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$	$xy = C,$	$x \neq 0$



$$\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad y = C\,e^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^2}{1+x^2} \qquad y = 1/[\ln(1+x^2)+C] \quad \text{lub} \quad y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{ctg} x \qquad y = C \sin x, \qquad x \neq k\pi$$

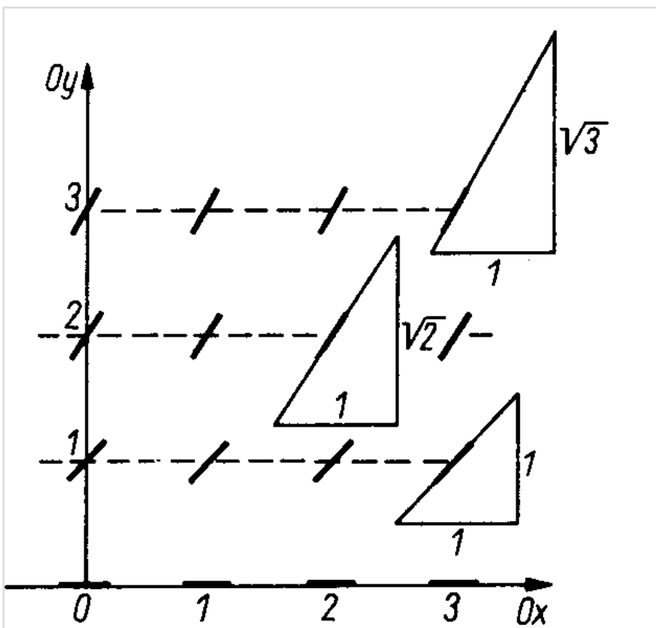


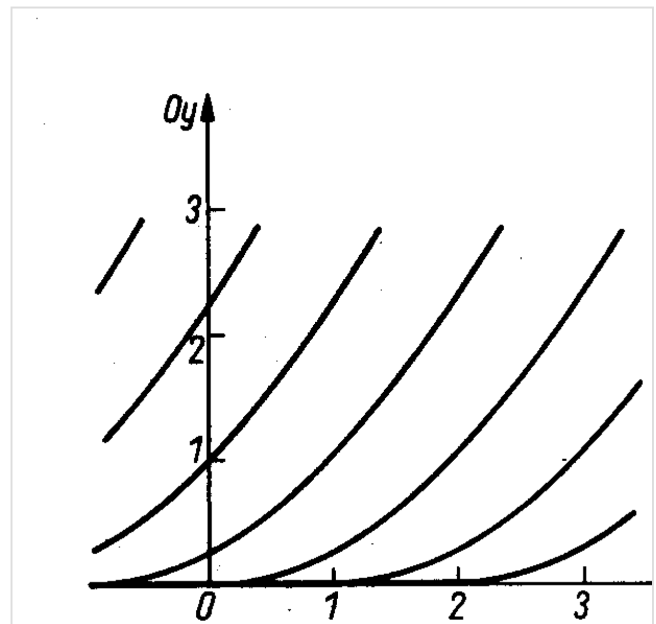
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

Na prostej	funkcja $f(x, y) = \sqrt{y}$ przyjmuje wartość	element kierunkowy tworzy z osią Ox kąt
$y = 0$	0	0°
$y = 1$	1	45°
$y = 2$	$\sqrt{2}$	54°44′
$y = 3$	$\sqrt{3}$	60°
$y = 4$	2	63°26′

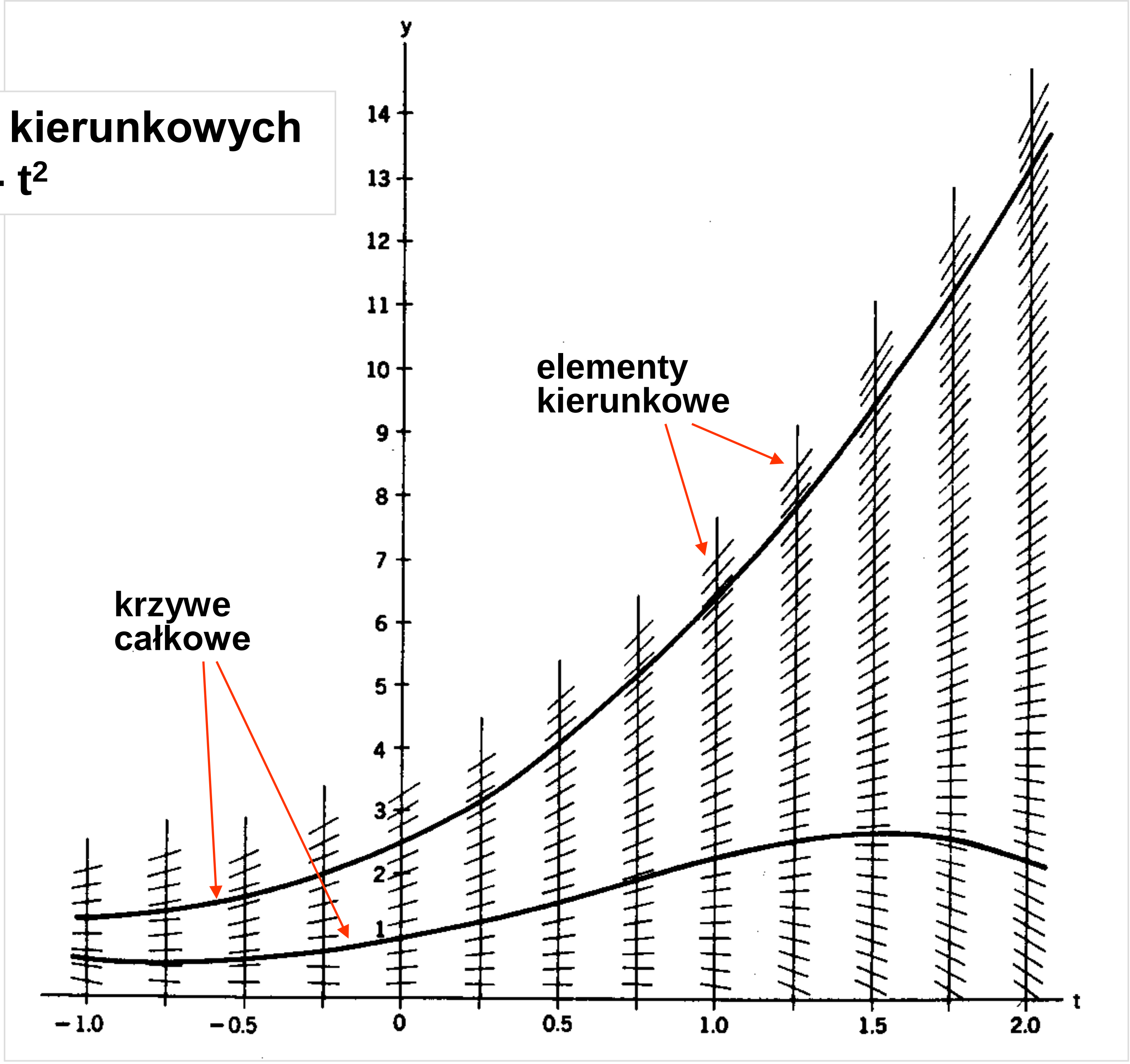
$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx, \quad 2\sqrt{y} = x - C$$

$$y = \frac{1}{4}(x - C)^2 \qquad x > C, \ C \in \mathcal{R}$$





Pole elementów kierunkowych równania $y' = y - t^2$

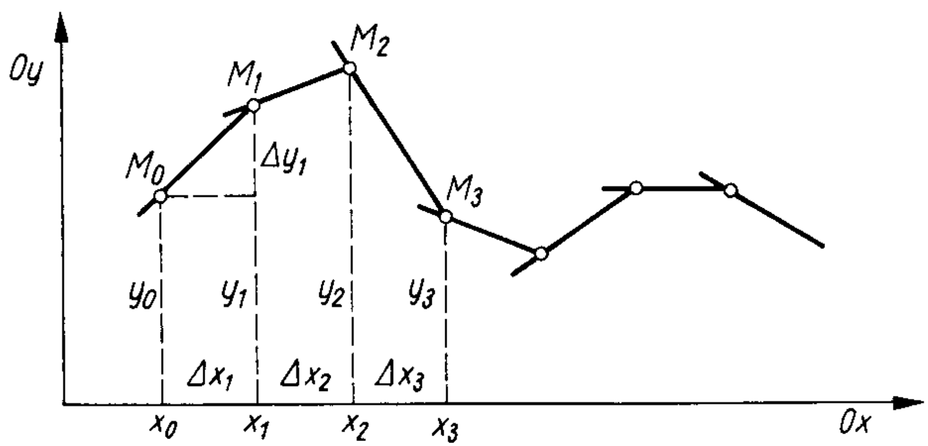


Metoda łamanych Eulera – graficznego rozwiązywania równania różniczkowego

Rozważmy równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y)$$

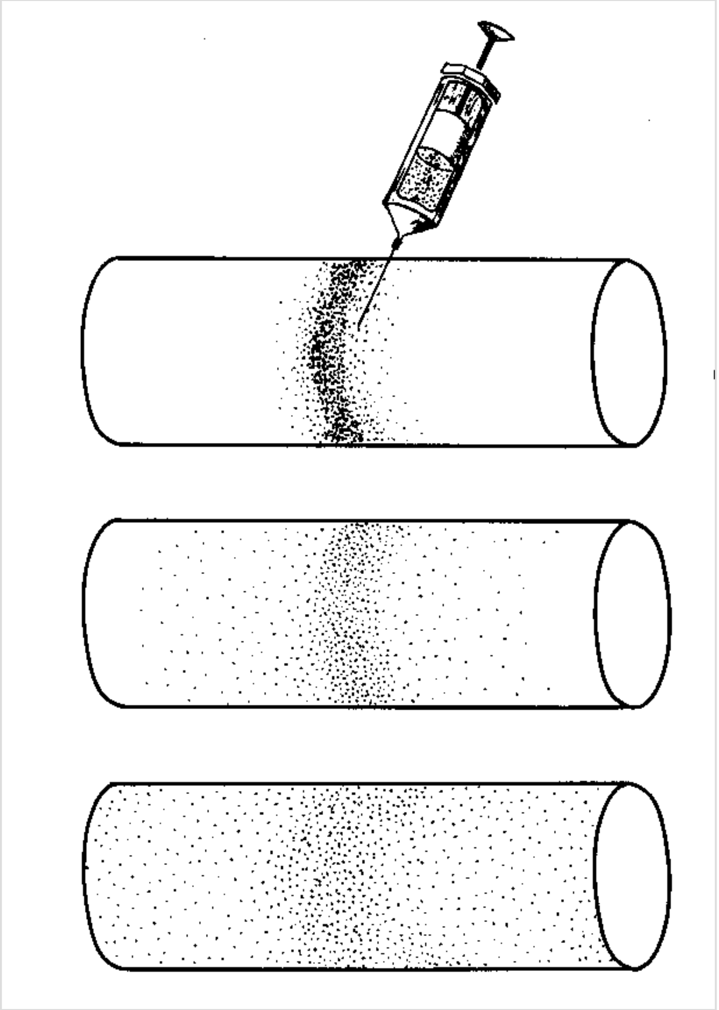
Łamaną Eulera dla równania (167.1) nazywamy linię łamaną $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots$ (rys. 167.1) leżącą w obszarze D i skonstruowaną w ten sposób, aby każdy z

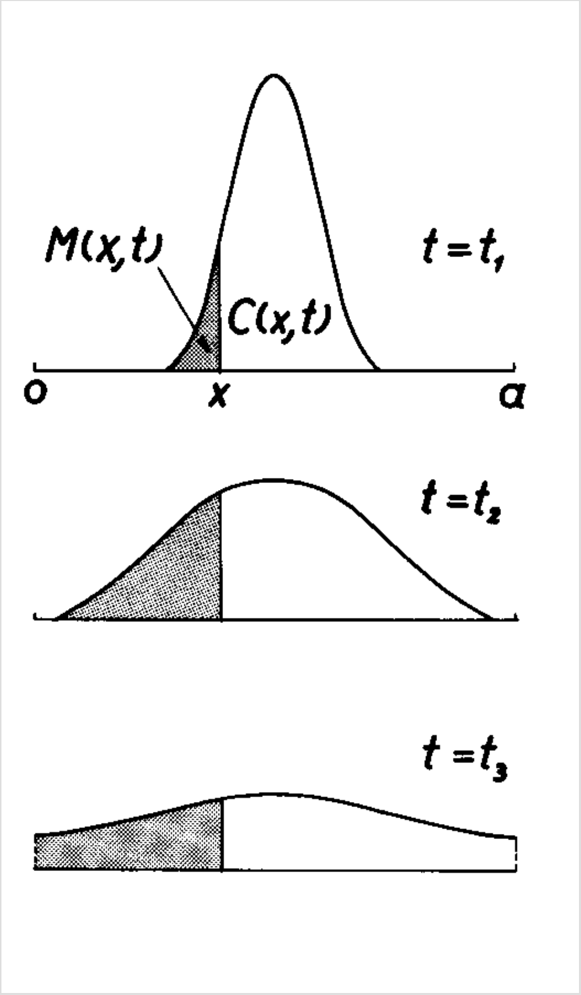


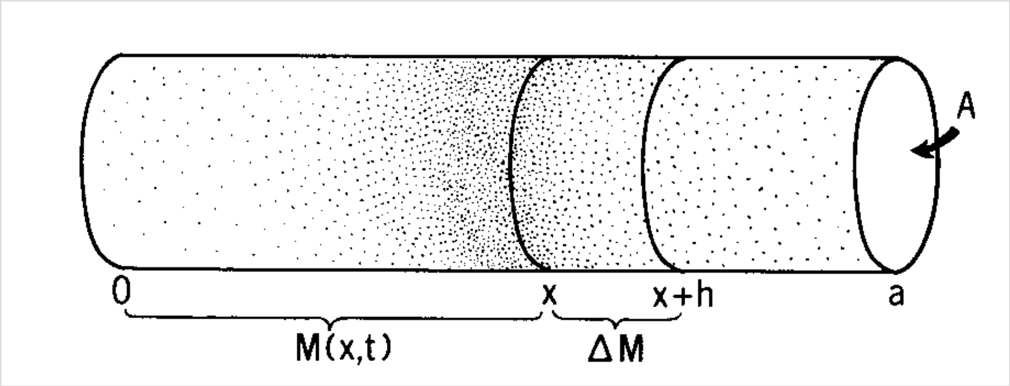
Rys. 167.1

odcinków $M_0 M_1, M_1 M_2, M_2 M_3, \ldots$ miał kierunek wyznaczony przez wartość funkcji f w punkcie początkowym tego odcinka

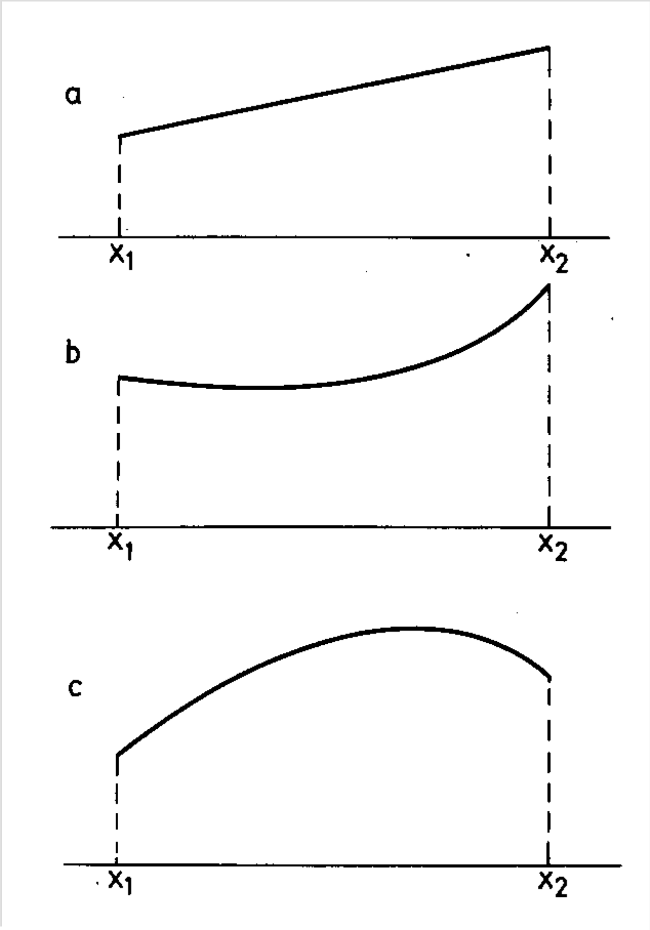
Równanie różniczkowego cząstkowe:
Przykład równania dyfuzji - przypadek jednowymiarowy







$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$



C(x,t) – gęstość substancji,
D- współczynnik dyfuzji

$C(x,t) = e^{ax+bt}$

lewa = $b\, e^{ax+bt}$, prawa = $D\, a^2\, e^{ax+bt}$

Równanie przewodnictwa np. impulsów nerwowych

$$\frac{\partial^2 V}{d x^2} - a^2 \frac{\partial V}{\partial t^2} + b \frac{\partial V}{\partial t} + cV = d$$

$V(x, t)$ – napięcie w odległości x w czasie t

Ilustracje sporządzono w oparciu o materiały pochodzące z następujących podręczników:

1. **Batschelet E. , Introduction to Mathematics for Life Sciences Springer-Verlag, Berlin 1975**
2. **Leitner R., Zarys matematyki wyższej dla studentów, cz.II, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998**
3. **Leitner R., Zacharski J., Zarys matematyki wyższej dla studentów, cz.III, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995**
4. **Neuhauser C., Calculus for Biology and Medicine Pearson Education 2004**